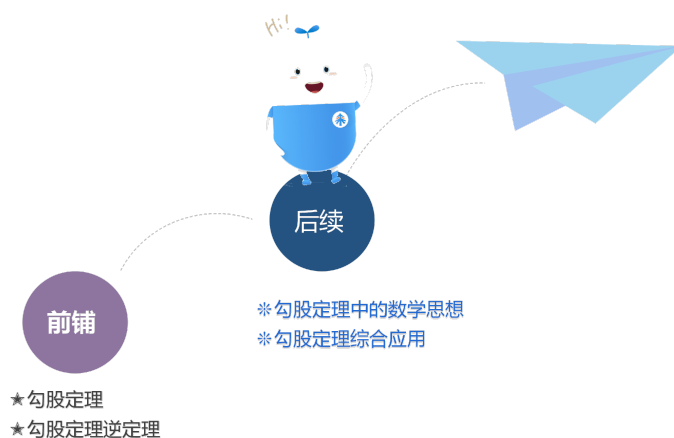
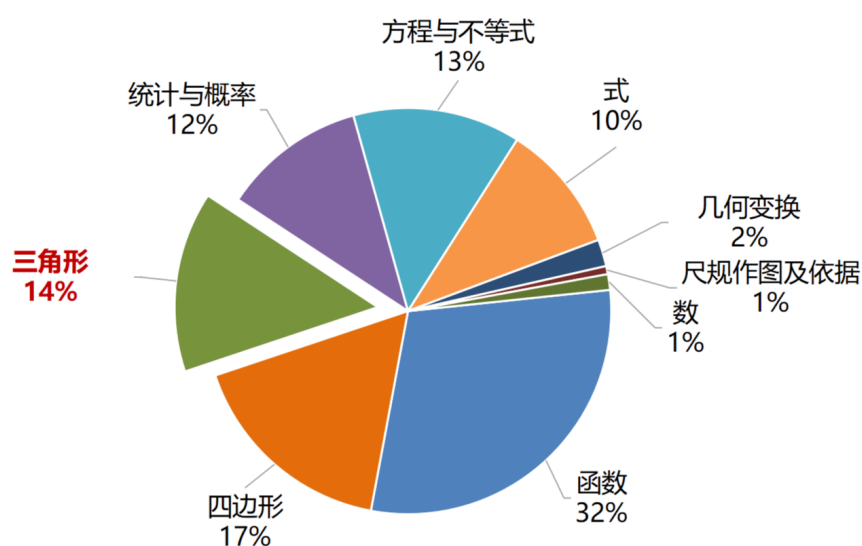


第1讲 勾股定理中的数学思想

勾股定理属于人教版第十七章的内容，这部分的易错点为勾股定理的前提条件——直角三角形，难点为勾股定理的综合应用，是期中、期末考试的高频考点。故这部分我们分为《勾股定理初步》、《勾股定理进阶》两个模块。本模块为《勾股定理进阶》，旨在帮助学生熟练掌握勾股定理的综合运用。

本模块难度中等，适应于勾股定理的短期突破，本模块分为勾股定理中的数学思想、勾股定理综合应用2讲内容，帮助学生熟悉勾股定理综合的常见题型，理清解题思路，学会利用数学思想解决问题。



一、勾股中的分类讨论思想

勾股中的分类讨论思想

题目中出现高的时候，高可能出现在三角形____部，也可能出现在三角形的____部，因此要讨论三角形的形状：锐角三角形高在____部，钝角三角形高在____部。

对于指明了三角形是直角三角形，但没有指明哪条边是斜边也需要对____的情况进行讨论：斜边为已知边，斜边为未知边。

当题目中寻找何时能构成直角三角形时，要对____进行分类讨论

|| 例题

1. 有一个三角形两边长为4和5，要使三角形为直角三角形，则第三边长为（ ）。
- A. 3 B. $\sqrt{41}$ C. 3或 $\sqrt{31}$ D. 3或 $\sqrt{41}$

|| 练习

2. 已知直角三角形的两边长为2和 $\sqrt{5}$ ，则该直角三角形的第三边的长为_____。

|| 例题

3. $\triangle ABC$ 中， $AB = 20$ ， $AC = 13$ ， BC 上的高为12，求 BC 的长。

4. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\angle B = 30^\circ$ ， $AB = 2$ ， $AC = \sqrt{2}$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积是_____。

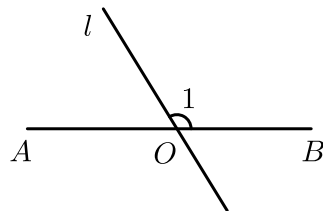
|| 练习

5. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 10$ ， $AC = 2\sqrt{10}$ ， BC 边上的高 $AD = 6$ ，则另一边 BC 等于_____。

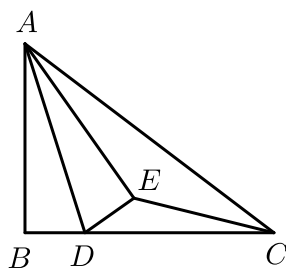
6. $\triangle ABC$ 中， $AB = 8$ ， $AC = 5$ ， $\angle B = 30^\circ$ ，则 $BC =$ _____。

例题

7. 如图, $AB = 6$, O 是 AB 的中点, 直线 l 经过点 O , $\angle 1 = 120^\circ$, P 是直线 l 上一点. 当 $\triangle APB$ 为直角三角形时, 则 AP 的长为 _____.



8. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle B = 90^\circ$, $AB = 6$, $BC = 8$, 点 D 是 BC 边上一点, 连接 AD , 把 $\angle B$ 沿 AD 折叠, 使点 B 落在点 E 处, 连接 CE , 当 $\triangle CDE$ 为直角三角形时, BD 的长为 _____.



练习

9. 在直角坐标系中点 $A(-1, 0)$, $B(0, 1)$, 点 P 为坐标轴上一点, 若要使 $\triangle ABP$ 为直角三角形, 则点 P 的坐标为 _____.
10. 等腰 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $BC = 6$, 底角为 30° , 动点 P 从点 B 向点 C 运动, 当 $\triangle PAB$ 是直角三角形时, BP 长为 _____.

二、勾股中的方程思想

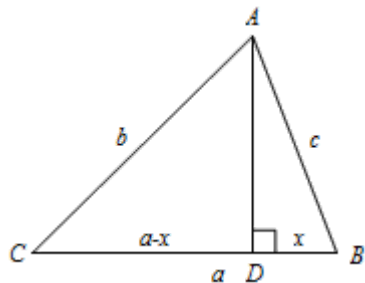
求任意三角形一条边上的高

已知三角形的三边长分别为 a , b , c , 求 BC 边上的高.

$\because \triangle ACD$ 和 $\triangle ABD$ 都是 _____ 三角形,

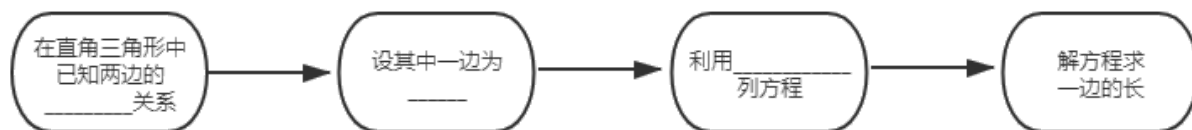
$\therefore AD^2 = \text{_____} = \text{_____}$,

解方程即可得到 x 的值.



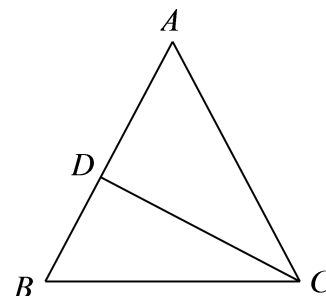
实际应用中的方程

解题思路：



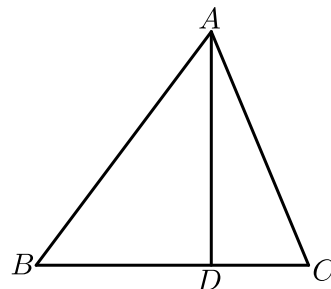
例题

11. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC$ ， $BC = 10$ ， D 为 AB 上一点， $CD = 8$ ， $BD = 6$ 。



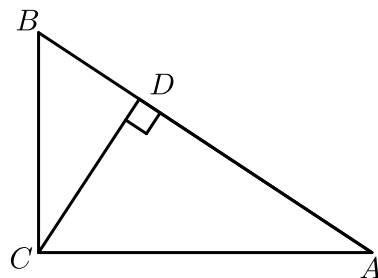
- (1) 求证： $\angle CDB = 90^\circ$ ；
- (2) 求 AC 的长。

12. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 15$ ， $BC = 14$ ， $CA = 13$ ，求 BC 边上的高 AD 。



练习

13. 已知：如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle ACB = 90^\circ$ ， $CD \perp AB$ 于点 D ， $\triangle ABC$ 的周长为20，斜边长为8，则 $CD =$ _____。

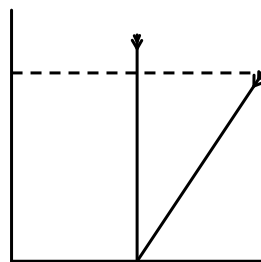


例题

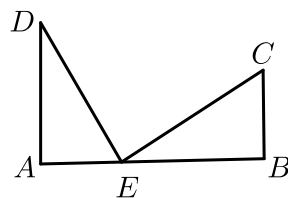
14. 小明想知道学校旗杆的高，他发现旗杆上的绳子垂到地面还多1m，当它把绳子的下端拉开5m后，发现下端刚好接触地面，则旗杆的高为_____m。

练习

15. 在我国古代数学著作《九章算术》中记载了一道有趣的问题，这个问题的意思是：有一个水池，水面是一个边长为10尺的正方形，在水池的中央有一根新生的芦苇，它高出水面1尺，如果把这根芦苇垂直拉向岸边，它的顶端恰好到达岸边的水面，请问这个水池的深度和这根芦苇的长度各是多少？



16. 如图，铁路上 A, B 两点相距25km， C, D 为两村庄， $DA \perp AB$ 于点 A ， $CB \perp AB$ 于点 B ，已知 $DA = 16\text{km}$ ， $CB = 11\text{km}$ ，现在要在铁路 AB 上建一个土特产品收购站 E ，使得 C, D 两村到 E 站的距离相等，则 E 站应建在离 A 站多少km处？

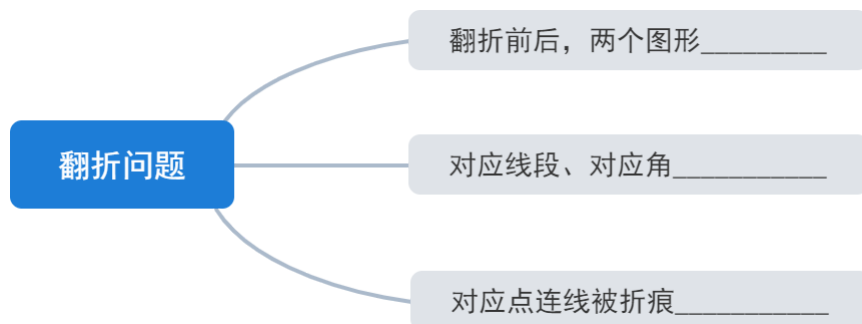


三、勾股中的转化与化归思想

展开图求最短距离

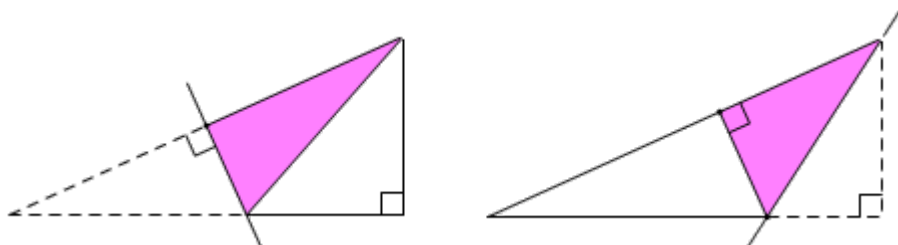
展开图求解最短距离，可以把几何体适当展开成平面图形，再利用_____，或点到直线_____等性质来解决问题。

翻折问题



常见翻折图形：

①三角形翻折

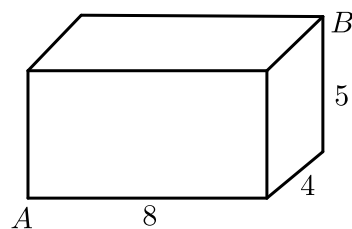


②矩形翻折

翻折使直角顶点重合	沿对角线翻折	翻折使直角顶点落在边上

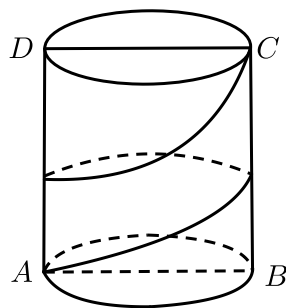
例题

17. 如图，长方体的长、宽、高分别为8cm、4cm和5cm，一只蚂蚁欲从顶点A沿长方体表面爬到点B处，则它所爬行的最短距离是（ ）cm.



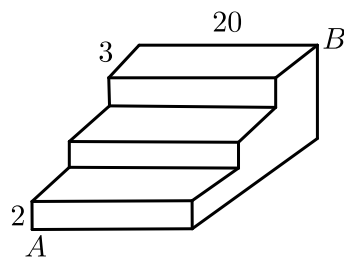
- A. $\sqrt{145}$ B. 13 C. 12 D. $\sqrt{185}$

18. 在底面直径为2cm，高为3cm的圆柱体侧面上，用一条无弹性的丝带（宽度忽略不计）从A至C按如图所示的圈数缠绕，则丝带的最短长度为 _____ cm.（结果保留 π ）

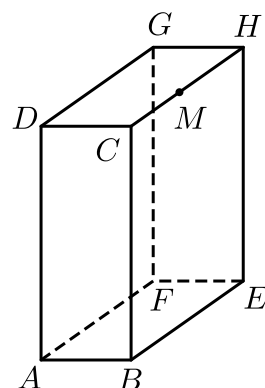


练习

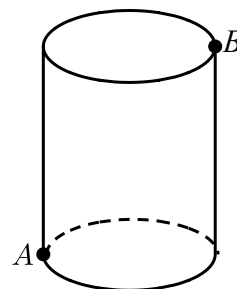
19. 如图，台阶A处的蚂蚁要爬到B处搬运食物，它爬行的最短距离是 _____ .



20. 如图，长方体的长 $BE = 15\text{cm}$ ，宽 $AB = 10\text{cm}$ ，高 $AD = 20\text{cm}$ ，点 M 在 CH 上，且 $CM = 5\text{cm}$ ，一只蚂蚁如果要沿着长方体的表面从点 A 爬到点 M ，需要爬行的最短距离是 _____ 。

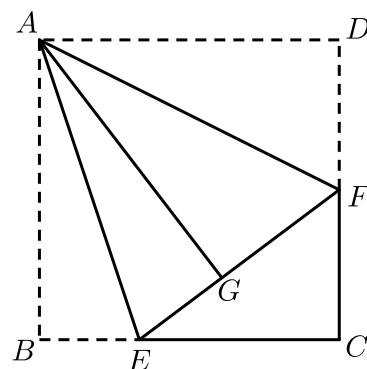


21. 如图，一个底面直径为 $\frac{30}{\pi}\text{cm}$ ，高为 20cm 的糖罐子，一只蚂蚁从 A 处沿着罐的表面爬行到 B 处，则蚂蚁爬行的最短距离是 _____ 。



例题

22. 如图，正方形纸片 $ABCD$ 的边长为3，点 E 、 F 分别在边 BC 、 CD 上，将 AB 、 AD 分别沿 AE 、 AF 折叠，点 B 、 D 恰好都落在点 G 处，已知 $BE = 1$ ，则 EF 的长为（ ）。



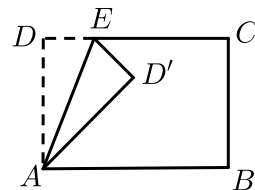
A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{5}{2}$

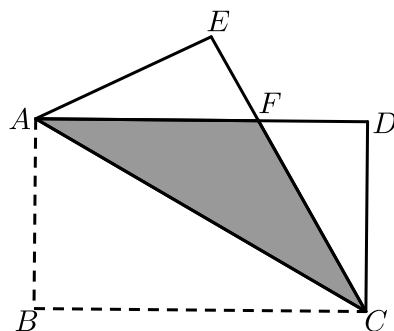
C. $\frac{9}{4}$

D. 3

23. 如图，长方形 $ABCD$ 中， $\angle DAB = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$ ， $AD = BC = 8$ ， $AB = CD = 17$ ，点 E 为射线 DC 上的一个动点， $\triangle ADE$ 与 $\triangle AD'E$ 关于直线 AE 对称，当 $\triangle AD'B$ 为直角三角形时， DE 的长为 _____ ．



24. 如图，将矩形 $ABCD$ 沿对角线 AC 翻折，点 B 落在点 E 处， EC 交 AD 于 F ．

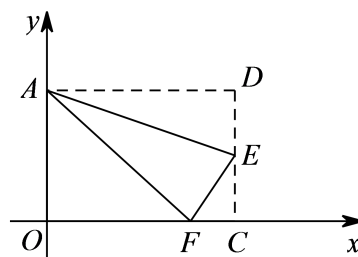


- (1) 求证： $\triangle AEF \cong \triangle CDF$ ．
 (2) 若 $AB = 4$ ， $BC = 8$ ，求图中阴影部分的面积 ．

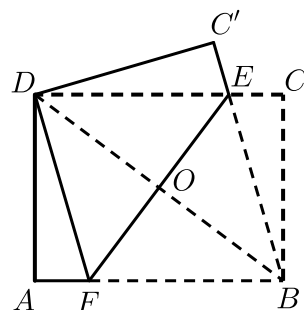
练习

25. 如图，在平面直角坐标系中，长方形纸片的 AB 边在 y 轴上， BC 边在 x 轴上， B 与坐标原点重合，折叠长方形 $ABCD$ 的一边 AD ，使点 D 落在 BC 边的 F 处，折痕为 AE ，已知 A 点坐标为 $(0, 8)$ ， C 点坐标为 $(10, 0)$ ．

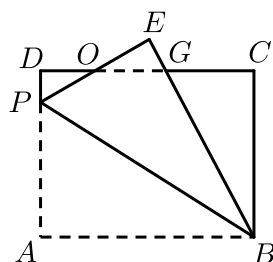
求： E 点坐标 ．



26. 如图所示, 把长方形 $ABCD$ 纸片折叠, 使点 B 落在点 D 处, 点 C 落在 C' 处, 折痕 EF 与 BD 交于点 O , 已知 $AB = 16$, $AD = 12$, 则折痕 EF 的长为 _____ .

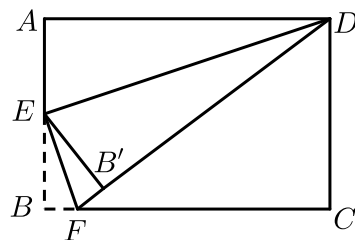


27. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 8$, $BC = 6$, P 为 AD 上一点, 将 $\triangle ABP$ 沿 BP 翻折至 $\triangle EBP$, PE 与 CD 相交于点 O , BE 与 CD 相交于点 G , 且 $OE = OD$, 则 AP 的长为 _____ .



 独步天下

28. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 4$, $AD = 6$, E 是 AB 边的中点, F 是线段 BC 上的动点, 将 $\triangle EBF$ 沿 EF 所在直线折叠得到 $\triangle EB'F$, 连接 $B'D$, 则 $B'D$ 的最小值是 () .



- A. $2\sqrt{10} - 2$ B. 6 C. $2\sqrt{13} - 2$ D. 4